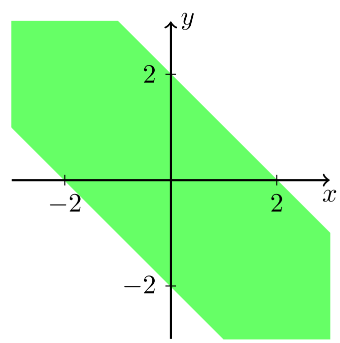
Metrische Räume

1. Aufgabe:

a) Die Menge entspricht dem grünen Band

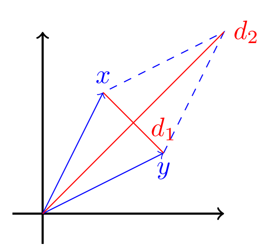


Die Funktion ist keine Norm, denn für $(1,-1) \neq (0,0)$ gilt $f(1,-1) = 0$. Widerspruch zur Definitheit!

b) Die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Für 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt daher

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 &= \big((x_1+y_1)^2 + \ldots + (x_n+y_n)^2\big) + \big((x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2\big) \\
&= \big((x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) + \ldots + (x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2)\big) \\
&+ \big((x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + \ldots + (x_n^2 - 2x_ny_n + y_n^2)\big) \\
&= 2(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2) \\
&= 2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)
\end{aligned}
$$

Zusatz: Wenn x und y die Kanten eines Parallelogramms symbolisieren, sind $d_1 = x - y$ und $d_2 = x + y$ die 2 Diagonalen. D.h., wenn man mit der euklidischen Norm die Länge misst, ist die Summe der quadratischen Längen der Diagonalen genauso groß wie die quadratischen Längen aller Seiten.



2. Aufgabe:

- ☐ Falsch. Es gilt zwar $\partial A \not\subseteq A$, daraus kann man aber nur schließen, dass A nicht abgeschlossen ist. Wenn man z.B. den Punkt $(2,0) \in A$ betrachtet, dann ist für jeden Radius $r > 0$ der Punkt $(2 + r/2, 0) \in B(0,r)$ mit $(2 + r/2)^2 > 4 \Rightarrow (2 + r/2, 0) \notin A$. Damit ist $(2,0) \in A$ kein innerer Punkt und A nicht offen.
- ☐ Wahr. $M_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ist offen, da $M_1^c = \{(0,0)\}$ abgeschlossen ist. $M_2 = \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen.
- ☐ Wahr. $M = \{(1,0),(1,1),(1,-1),(2,0),(2,-1),(2,1)\}$. Für alle $(x,y) \in M$ gilt, dass für alle $0 < r < 1$ in $B(x,r)$ die Punkte $(x, y + r/2) \notin M$ liegen. Damit ist jeder Punkt aus M kein innerer Punkt und das Innere entspricht der leeren Menge.
- ☐ Falsch. Angenommen B ist beschränkt, dann müsste es ein $m \in \mathbb{R}_+$ geben mit $\forall\,(x,y) \in B : \|(x,y)\|_2 \leq m$. Für $z = 1/(m+1) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist aber $(x^*, y^*) = (1/z, \sin(1/z)) = (m+1, \sin(m+1)) \in B$ mit $\|(x^*, y^*)\|_2 = \sqrt{(m+1)^2 + \sin^2(m+1)} \leq m+1$. Widerspruch.
- ☐ Falsch. $0 \in \partial S$, denn $\forall\, r > 0 : -r/2 \in B(0,r) \cap S^c \wedge 1/(\lceil 1/r \rceil + 1) \in S \cap B(0,r)$. Damit auch $0 \in \bar{S}$, aber $0 \notin S$.

3. Aufgabe:

a) Behauptung: f hat in $(0,0)$ den Grenzwert 1 und g hat keinen Grenzwert in $(0,0)$
Beweis: Sei $(x_n, y_n) \to (0,0)$ beliebig. Dann gilt $x_n \to 0, y_n \to 0, n \to \infty$. Nach Grenzwertsätzen gilt auch $x_n + y_n \to 0$ und somit $f(x_n, y_n) \to \cos(0) = 1$.
Für $(x_n^1, y_n^1) = (1/(2n), 1/(2n)) \to (0,0)$ gilt

$$g(x_n^1, y_n^1) = \cos(2n\pi) = 1 \to 1,$$

aber für $(x_n^2, y_n^2) = (1/(2n+1), 1/(2n+1)) \to (0,0)$ gilt

$$g(x_n^2, y_n^2) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \to -1$$

Da die Funktionswerte für 2 Punktfolgen, die gegen $(0,0)$ konvergieren, unterschiedliche Grenzwerte besitzen, hat g in $(0,0)$ keinen Grenzwert.

b) f lässt sich stetig in $(0,0)$ fortsetzen, wenn f einen Grenzwert in $(0,0)$ besitzt. In allen anderen Punkten ist f als Zusammensetzung stetiger Funktionen (Nenner ungleich Null für $(x,y) \neq (0,0)$) wieder stetig. Sei $(x_n, y_n) \to (0,0)$ beliebig. Dann gibt es Folgen (φ_n) und $(r_n) \subset \mathbb{R}_+, r_n \to 0+$ mit $(x_n, y_n) = (r_n \cos(\varphi_n), r_n \sin(\varphi_n))$. Es gilt

$$f(x_n, y_n) = \frac{r_n^2 \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n)}{|r_n|(|\cos(\varphi_n)| + |\sin(\varphi_n)|)} = \frac{|r_n| \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n)}{|\cos(\varphi_n)| + |\sin(\varphi_n)|}$$

Da der Nenner niemals Null werden kann, konvergiert $f(x_n, y_n) \to 0$, da $|r_n| \to 0$. Eine stetige Fortsetzung von f ist

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Differentialrechnung

1. Aufgabe:

Sei $f(x,y) := \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a) Berechne den Gradienten ∇f auf $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$.

b) Zeige, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (1,0))$.

c) Berechne nach Definition die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(1,0)$.

d) Zeige, dass f nicht differenzierbar an der Stelle $(1,0)$ ist.

Beweis. **a)** Es ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Für $f(x,y)$ gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(-x^2+2x+y^2-1)}{(x^2-2x+y^2+1)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(x-1)^3}{(y^2+(x-1)^2)^2}$.

Damit ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2(-x^2+2x+y^2-1)}{(x^2-2x+y^2+1)^2} \\ \frac{2y(x-1)^3}{(y^2+(x-1)^2)^2} \end{pmatrix}$.

b) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$ differenzierbar mit der Ableitung $\nabla f(x,y)$. Weiterhin ist $\nabla f(x,y)$ in seinen Komponenten als Komposition von Polynomen in $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$ stetig. Insgesamt ist f also stetig differenzierbar.

c) Mit der Definition folgt für den Punkt $(1,0)$:
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

Und $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

d) Falls f im Punkt $(1,0)$ differenzierbar wäre, so gilt für die Jacobi-Matrix $J_f(1,0) = f'(1,0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)) = (0,0)$.

Die Jacobi-Matrix J_f müsste

$\frac{\|f(x,y)-f(1,0)-J_f(\binom{x}{y}-\binom{1}{0})\|}{\|\binom{x}{y}-\binom{1}{0}\|} \to 0$ erfüllen, mit $\binom{x}{y} \to \binom{1}{0}$.

Also muss $\frac{\|\frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}-0-0(x-1)-0(y-0)\|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}} \to 0$ gelten.

$\Leftrightarrow \frac{\|x-1\|y^2}{((x-1)^2+y^2)\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \to 0.$

Wähle nun den Weg $(1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (1,0)$ für $n \to \infty$.

$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \not\to 0.$

Damit ist f in $(1,0)$ nicht differenzierbar.

□

2. Aufgabe:

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) := xyz + 3xz^3$ im Punkt $P(1,2,1)$ in die Richtung $\vec{v} = (1,-2,2)$.

Beweis. Normiere zuerst die Richtung $\vec{v} = (1,-2,2)$:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \rightarrow \vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{3}(1,-2,2)$.

Berechne dann den Gradienten $\nabla f(x,y,z)$ im Punkt P:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + 3z^3 \\ xz \\ xy + 9xz^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,-2,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Multipliziere nun $\vec{e}_v$ mit $\nabla f(1,-2,2)$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1,-2,2) = \frac{25}{3}.$$ □

3. Aufgabe:

Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = ((x^2+y^2-1)x, (x^2+y^2-1)y)$ und gib genau die Punkte an, an denen die Jacobi-Matrix nicht invertierbar ist.

Beweis. Es sei $J_f(x,y)$ die Jacobi-Matrix zu f. Dann ist $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1+2x^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-1+2y^2 \end{pmatrix}$
Dann ist die Determinante von $J_f(x,y)$

$$\begin{aligned}
&det(J_f(x,y)) = (3x^2+y^2-1)(x^2+3y^2-1) - 4x^2y^2 \\
&= 3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 1 \\
&= 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - 4y^2 + 2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 1 \\
&= 2(x^2 - y^2 - 1)^2 + x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 - 1 \\
&= 2(x^2 - y^2 - 1)^2 + x^2(x^2+y^2) + y^2(x^2+y^2) - 1 \\
&= 2(x^2 - y^2 - 1)^2 + (x^2+y^2)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Substituiere $z = x^2 + y^2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&det(J_f(x,y) = 2(z-1)^2 + z^2 - 1. \\
&det(J_f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2(z-1)^2 + z^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3z^2 - 4z + 1 = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow z = 1$ oder $z = \frac{1}{3}$.

$J_f(x, y)$ ist also genau dann nicht invertierbar, wenn $1 = x^2 + y^2$ oder $\frac{1}{3} = x^2 + y^2$. $\square$

4. Aufgabe:

Bestimme die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y^2 + xyln(x)$ und ob diese Minima oder Maxima sind.

Beweis. Berechne zuerst $\nabla f(x, y)$ und suche stationäre Punkte. Berechne anschleßend die Hessematrix H_f von $f(x, y)$ und untersuche deren Definitheit in den stationären Punkten.

Es ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(ln(x) + 1) \\ 2y + xln(x) \end{pmatrix}$

Für $y = 0$ oder $x = \frac{1}{e}$ gilt $y(ln(x) + 1) = 0$. Wenn $y = 0$ folgt mit $2y + xln(x) = 0$ sofort $x = 1$. Wenn $x = \frac{1}{e}$ folgt mit $2y + xln(x) = 0$ sofort $y = \frac{1}{2e}$.

Damit ergeben sich zwei stationäre Punkte $P_1 = (1, 0)$ und $P_2 = (\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$.

Für die Hessematrix H_f folgt:
$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & lnx + 1 \\ lnx + 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Die Eigenwerte sind $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$. Damit ist $H_f(1, 0)$ indefinit und somit ist P_1 ein Sattelpunkt.

Für P_2 ergibt sich:
$H_f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Die Eigenwerte sind $\frac{1}{2}$ und 2. Damit ist $H_f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$ positiv definit und somit ist P_2 ein lokales Minimum.

$\square$

5. Aufgabe:

Es ist $f(x, y) = e^x sin(y)$ gegeben. Sowie $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T = (sin(t), t^2)^T$. Berechne die Ableitung $f'(g_1(t), g_2(t))$ mithilfe der Kettenregel.

Beweis. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x siny$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x cosy$, $g_1'(t) = cost$ und $g_2'(t) = 2t$.
Damit und mithilfe der Kettenregel folgt $f'(g_1(t), g_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))g_2'(t)$
$\Rightarrow f'(g_1(t), g_2(t)) = e^{sint} cost \cdot sint^2 + e^{sint} cost^2 \cdot 2t.$ $\square$

Lokale Approximation
Umkehrabbildung
Implizite Funktion

Lokale Approximation

1. Aufgabe:

a) Wir berechnen zuerst die ersten drei Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(x) = \frac{6}{(1+x)^4}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} T_2(x,2) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{1}{27}(x-2)^2. \end{aligned}$$

Das Restglied hat die Form

$$\begin{aligned} R_2(x,2) &= \frac{(x-2)^3}{3!} f'''(\xi) = \frac{(x-2)^3}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{(1+\xi)^4} \\ &= \frac{(x-2)^3}{(1+\xi)^4}, \end{aligned}$$

wobei ξ eine Zwischenstelle von x und $x_0 = 2$ ist.

b) Sei $x \in [1,3]$ und ξ zwischen x und $x_0 = 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |R_2(x,2)| &= \left| \frac{(x-2)^3}{(1+\xi)^4} \right| = \frac{1}{(1+\xi)^4} \cdot \left|(x-2)^3\right| \\ &\leq \frac{1}{2^4} \cdot \left|1^3\right| = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe:

Wir berechnen zuerst einige Ableitungen von f und schauen uns auch die jeweiligen Bilder in $x_0 = 0$ an, um ein Schema zu erkennen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \sin(x) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= x \cdot \cos(x) + \sin(x) & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -x \cdot \sin(x) + \cos(x) + \cos(x) & f''(0) &= 2 \\
f'''(x) &= -x \cdot \cos(x) - \sin(x) - 2\sin(x) & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= x \cdot \sin(x) - \cos(x) - 3\cos(x) & f^{(4)}(0) &= -4 \\
f^{(5)}(x) &= x \cdot \cos(x) + \sin(x) + 4\sin(x) & f^{(5)}(0) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= -x \cdot \sin(x) + \cos(x) + 5\cos(x) & f^{(6)}(0) &= 6 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Es gilt also $f(0) = 0, f''(0) = 2, f^{(4)} = -4, f^{(6)} = 6, \ldots$ und für die ungeraden Ableitungen ist das Bild immer 0 für $x = 0$. Also ist

$$T(x,0) = +2\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^4}{4!} + 6\frac{x^6}{6!} - 8\frac{x^8}{8!} + \cdots .$$

Wir können allgemein für gerade bzw. ungerade Ableitungen schreiben:

$$f^{(2k+1)} = 0 \text{ und } f^{(2k)} = (-1)^{k+1} \cdot 2k \text{ für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Die Taylorreihe für $x_0 = 0$ lautet dann also

$$T(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot 2k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Umkehrabbildung und implizite Funktion

3. Aufgabe:

Wir überprüfen zunächst alle Voraussetzungen zum Satz über die Umkehrabbildung (Satz 10.58.):

- Es ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine offene Menge.
- Die Komponenten von f sind stetig differenzierbar und damit auch f selbst.
- Wir berechnen die Jacobi-Matrix von f und prüfen die Invertierbarkeit dieser Matrix für beliebige $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

  $$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}.$$

  Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ beliebig. Dann ist

  $$\det f'(x_0, y_0) = 4y_0^2 - (-4x_0^2) = 4(x_0^2 + y_0^2)$$

  $\Rightarrow \det f'(x_0, y_0) > 0$.

Somit existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ so, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $V \subseteq f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ sind mit $(x_0, y_0) \in U$ und $f(x_0, y_0) \in V$. Es gilt also: $f|_U : U \to V$ ist bijektiv. Damit ist f lokal invertierbar.

4. Aufgabe:

a) Wir definieren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen alle Voraussetzungen zum Satz über implizite Funktionen (Satz 10.66.):

- Es ist $\mathbb{R}^3$ eine offene Menge.
- Es ist $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 18z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Einträge der Jacobi-Matrix sind stetig. Damit ist f stetig differenzierbar.

- Es ist
$$\begin{aligned} f\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{4}{13} + \frac{9}{13} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Es ist $f_{(y,z)} = \begin{pmatrix} 8y & 18z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $f_{(y,z)}\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{13}} & -\frac{18}{\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Somit ist
$$\begin{aligned} \det f_{(y,z)}\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right) &= \frac{8}{\sqrt{13}} + \frac{18}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{13}}} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{13} \\ &= \sqrt{52} \neq 0. \end{aligned}$$

Mit dem Satz folgt dann: f ist in einer Umgebung $U = U(x) = U(0)$ eindeutig nach $(y, z) =: g(x)$ auflösbar. D.h., es existiert ein $g \in C^1(U)$ so, dass $g(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ und $f(x, g(x)) = (0, 0)$ ist.

b) Mit Satz 10.66. folgt:
$$\begin{aligned} g'(0) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(y,z)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0) = -\frac{1}{\sqrt{52}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{18}{\sqrt{13}} \\ -1 & \frac{8}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{52}}\begin{pmatrix} \frac{18}{\sqrt{13}} \\ \frac{8}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{13}} \cdot \frac{\cancel{18}\,9}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{13}} \cdot \frac{\cancel{8}\,4}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} \\ -\frac{4}{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösungen Integrale

1. Aufgabe:

(i) $\int\limits_0^\pi x\cos(x)\ dx \underset{\text{P.I.}}{=} x\sin(x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin(x)\ dx = \int\limits_0^\pi -\sin(x)\ dx = \cos(x)\Big|_0^\pi = \underline{-2}$

(ii) $\int\limits_0^\pi \sin^3(x)\ dx = \int\limits_0^\pi \sin(x)\sin^2(x)\ dx = \int\limits_0^\pi \sin(x)(1-\cos^2(x))\ dx$

Substituiere: $u = \cos(x),\ \frac{du}{dx} = -\sin(x),\ u(0) = 1,\ u(\pi) = -1$

$\int\limits_1^{-1}(u^2-1)\ du = \int\limits_{-1}^1 (1-u^2)\ du = u - \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \underline{\frac{4}{3}}$

Achtung! Fehler in der Aufgabe, mit den gegebenen Grenzen kann das Integral nicht berechnet werden, da der Tangens bei Pi/2 eine Polstelle hat! Formale Methode dennoch richtig, berechne unbestimmt:

(iii) $\int \tan(x)\ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx$

Substituiere: $u = \cos(x),\ \frac{du}{dx} = -\sin(x)$

$\int \frac{\sin(x)}{u}\frac{du}{-\sin(x)} = \int \frac{1}{u}\ du = \ln(|u|)$ Rücksubstitution: $u = \cos x$

$= \ln|cos(x)|$

(iv) $\int \frac{e^x}{5+e^x}\ dx =$

Substituiere: $u = e^x, \frac{du}{dx} = e^x$

$\int \frac{u}{5+u}\ \frac{du}{u} = \int \frac{du}{5+u} = \ln(|5+u|)$ Rücksubstitution: $u = e^x$

$= \underline{\ln|5+e^x| + c}, c \in \mathbb{R}$

(v) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) \ dx$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 1 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + c(x-1)$

$\Leftrightarrow 1 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx - C$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 \underbrace{(A+B)}_{=0} + x \underbrace{(2A+C)}_{=0} + \underbrace{(A-B-C-1)}_{=0}$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}$

$\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) \ dx = \int \left(\frac{1}{x-1} \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{x+1}\frac{1}{4} + \frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{2} \right) \ dx$

$= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \underline{-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + c,}\ \ c \in \mathbb{R}$

(vi) $\int \ln x \ dx = \int 1 \cdot \ln x \ dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = \underline{x \ln x - x + c}, c \in \mathbb{R}$

2. Aufgabe:

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt, dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert, sodass

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x+1} dx = \frac{\cos(\xi)}{\xi+1} \cdot (1-0)$$

Für eine möglichst gute Abschätzung sucht man nun nach Maximal- und Minimalwerten der linken Seite. Die Funktion hat keine lokalen Extrema (Skizze), daher betrachte man nur die Ränder:

$$\frac{\cos 1}{1+1} \approx 0,27,\ \ \frac{\cos 0}{0+1} = 1 \ \Rightarrow 0,27 \leq \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x+1} dx \leq 1$$

3. Aufgabe:

(i) $\int\limits_0^\infty e^{-x} \cos(x) \ dx \underset{\text{P.I.}}{=} \lim\limits_{a\to\infty} -e^{-x}\cos(x) \Big|_0^a - \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin(x) \ dx = 0 - (-e^0 \cos(0)) - \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin(x) \ dx$

$\underset{\text{P.I.}}{=} 1 - \left[\underbrace{\lim\limits_{a\to\infty} -e^{-x} \sin x \Big|_0^a}_{=0} - \int\limits_0^\infty -e^{-x} \cos x \ dx \right] \Rightarrow 2 \int\limits_0^\infty e^{-x} \cos x \ dx = 1 \ \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x} \cos x \ dx = \underline{\frac{1}{2}}$

(ii) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{1-x^2}\ dx = \int\limits_{0}^{-1} \frac{1}{x^2-1}\ dx = \int\limits_{0}^{-1} \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int\limits_{0}^{-1} \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)\ dx$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$\Leftrightarrow 1 = Ax + A + Bx - B$

$\Leftrightarrow 0 = x\underbrace{(A+B)}_{=0} + \underbrace{(A-B-1)}_{=0} \ \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

$$\int\limits_{0}^{-1} \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-1} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-1} \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1|\ \Big|_0^{-1} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{b\to -1^+} \ln|x+1|\ \Big|_0^{b}}_{\text{divergent}} \text{ ex. nicht}$$

(iii) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx = \int\limits_{0}^{1} \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \underset{\text{P.I.}}{=} \lim_{b\to 0^+} 2\sqrt{x}\ln x\ \Big|_b^1 - \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{x}}\ dx = \lim_{b\to 0^+} 2\sqrt{x}\ln x\ \Big|_b^1 - 4\sqrt{x}\ \Big|_0^1$

$= 0 - \lim_{b\to 0^+} 2\sqrt{b}\ln b - 4 = \underline{-4}$, denn: $\lim_{b\to 0^+} \frac{2\ln b}{-\sqrt{b}^{-1}} \underset{L'Hospital}{=} \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{2}{b}}{\frac{1}{2b^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{b\to 0^+} 4\sqrt{b} = 0$